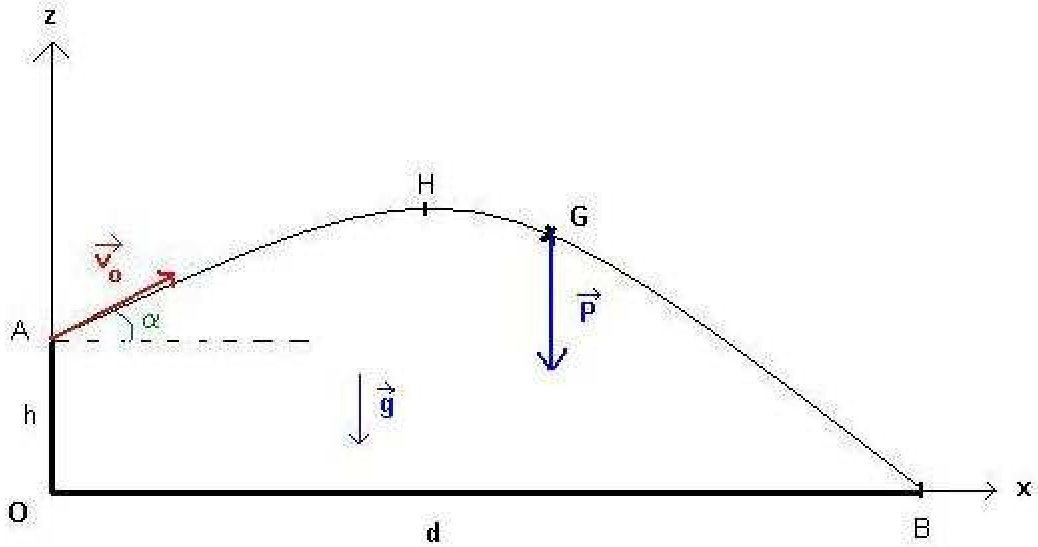
Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

Etudions le mouvement d'un projectile dans une région de l'espace où le champ de pesanteur peut-être considéré comme uniforme. (repère cartésien)



Système : le projectile

Référentiel : terrestre considéré comme galiléen

Bilan des forces : une fois lancé le projectile est en **chute libre** et donc soumis qu'à son **poids** $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

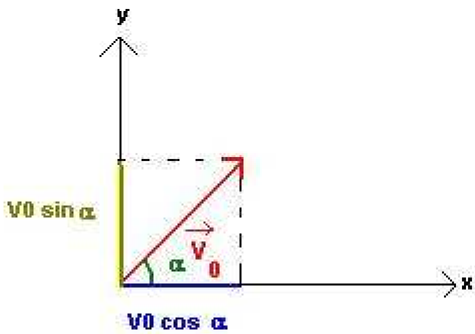
Conditions initiales :

à t = 0

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = 0 \\ z = h \end{cases}$$

$z = h$ car *le projectile est lancé du point A*

$$\vec{v_0}\begin{cases} v_{0_x} = v_0 \times \cos\alpha \\ v_{0_z} = v_0 \times \sin\alpha \end{cases}$$



Deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

Projection sur les axes :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = g_x = 0 & (\text{« 0 » car } \vec{g} \text{ et l'axe Ox sont perpendiculaires}) \\ a_z = g_z = -g & (\text{« } -g \text{ » signe "−" car } \vec{g} \text{ et l'axe Oz sont de sens opposé}) \end{cases}$$

Valeur de l'accélération : a = g (une valeur est toujours positive)

Détermination de la vitesse :

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$ donc v_x est la primitive de a_x par rapport au temps

donc : $v_x = C_1$ C_1 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

à t = 0 $v_{0_x} = v_0 \times \cos\alpha = C_1$ donc : $\mathbf{v_x = v_0 \times \cos\alpha}$

$a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$ donc v_z est la primitive de a_z par rapport au temps

donc : $\mathbf{v_z = -g \times t + C_2}$ C_2 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

à t = 0 $v_{0_z} = v_0 \times \sin\alpha = \mathbf{-g \times 0 + C_2} = C_2$ donc : $\mathbf{v_z = -g \times t + v_0 \times \sin\alpha}$

donc : $\mathbf{v_x = v_0 \times \cos\alpha}$

$\mathbf{v_z = -g \times t + v_0 \times \sin\alpha}$

Détermination des coordonnées :

$V_x = \frac{dx}{dt}$ donc x est la primitive de v_x ($v_x = v_0 \times \cos\alpha$) par rapport au temps

Donc : $x = v_0 \times \cos\alpha \times t + C_1'$ C_1' est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

A t = 0 : $x = v_0 \times \cos\alpha \times 0 + C_1' = C_1' = 0$ donc $C_1' = 0$ donc

$$\mathbf{x = v_0 \times \cos\alpha \times t}$$

$V_z = \frac{dz}{dt}$ donc z est la primitive de v_z ($v_z = -g \times t + v_0 \times \sin\alpha$) par rapport au temps

Donc : $z = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + C_2'$ C_2' est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

A t = 0 : $z = h = -\frac{1}{2} g \times 0^2 + v_0 \times \sin\alpha \times 0 + C_2' = C_2'$ donc $C_2' = h$ donc :

$$\mathbf{z = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + h}$$

donc : $\mathbf{x = v_0 \times \cos\alpha \times t}$

$\mathbf{z = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + h}$

Equation de la trajectoire :

Ne dépend que des coordonnées mais pas du temps.

On isole t dans l'équation cartésienne de x, et on le remplace dans celle de z.

$x = v_0 \times \cos\alpha \times t$ ⇔ $t = \dfrac{x}{v0 \times \cos\alpha}$ on remplace dans z

$z = -\frac{1}{2}\, g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + h$ ⇔ $z = -\frac{1}{2}\, g \times \left(\dfrac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \times \sin\alpha \times \left(\dfrac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right) + h$

$\mathbf{z = \dfrac{-g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2\alpha} \times x^2 + \sin\alpha \times x + h}$ **équation d'une parabole dans le plan (xOz)**

Détermination de l'altitude maximale atteinte : z_H (appelée « flèche »)

Lorsque le projectile passe par H, le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire est donc horizontal. Donc $v_z = 0$

Or $v_z = -g \times t_H + v_0 \times \sin\alpha = 0$ ⇔ $t_H = \dfrac{v_0 \times \sin\alpha}{g}$

On remplace dans l'expression de z_H :

$Z_H = -\frac{1}{2}\, g \times t_H^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t_H + h$

$Z_H = -\frac{1}{2}\, g \times \left(\dfrac{v_0 \times \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \times \sin\alpha \times \left(\dfrac{v_0 \times \sin\alpha}{g}\right) + h = \mathbf{\dfrac{v_0^2 \times \sin^2\alpha}{2 \times g}}$

Détermination de la portée horizontale = distance maximale atteinte = 0B = d sur le schéma

Alors $z_B = 0$ donc $z_B = \dfrac{-g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2\alpha} \times x_B^2 + \sin\alpha \times x_B + h = 0$ *équation qu'il faut résoudre !*