Les systèmes oscillants

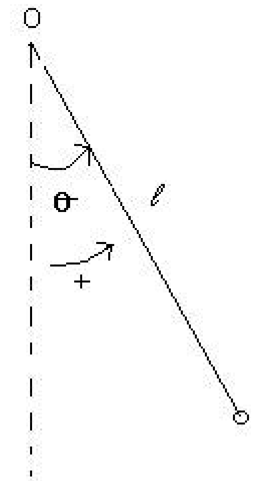
I) Le pendule simple :

Un pendule simple est constitué par un solide de petites dimensions, suspendu par un fil inextensible de longueur ℓ, dont la masse est négligeable devant celle du solide.

La période propre T_0 (lorsque l'oscillateur est en oscillations libres) est la durée d'une oscillation= d'un aller-retour.

$$T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{l}{g}}$$

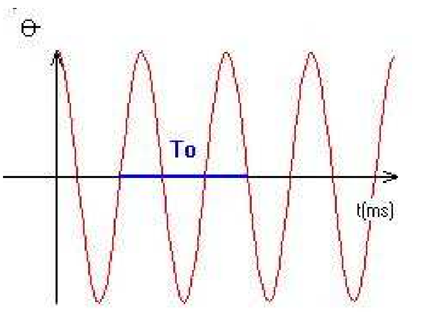
T_0 est en secondes (s), ℓ est en mètre (m) et g intensité de la pesanteur ($m.s^{-2}$).



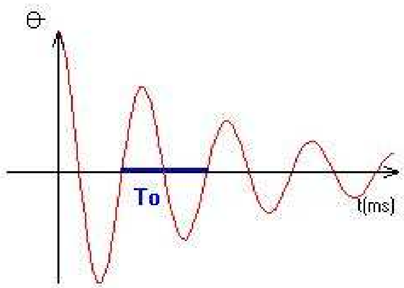
Loi d'isochronisme des petites oscillations : pour des amplitudes θ inférieures à 20° environ, la période T_0 d'un pendule simple est indépendante de l'amplitude des oscillations.

Loi des masses : la période T_0 d'un pendule simple est indépendante de la masse m du pendule.

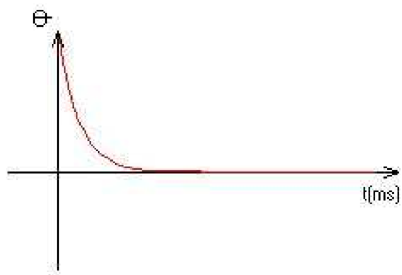
Loi des longueurs : la période T_0 d'un pendule simple est proportionnelle à la racine carré de la longueur ℓ du pendule.



Sans frottement (pas d'amortissement)
Mouvement périodique
Période propre To



Frottements légers (amortissement)
Mouvement pseudo-périodique
Pseudo-période T = To

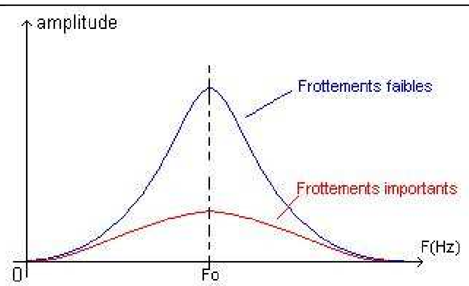


Frottements très élevés
Mouvement apériodique
Pas d'oscillation

Rappel : pour plus de précision , mesurer plusieurs périodes.

Le pendule de période propre To (de fréquence propre fo) peut-être soumis à des oscillations forcées de période Te (de fréquence fe). Le dispositif imposant les oscillations est appelé **excitateur**, et celui les subissant est le **résonateur**.

Pour un amortissement faible,
lorsque fe ≈ fo, l'amplitude des oscillations forcées est maximale : on dit qu'il y a résonance.



II) Dispositif solide-ressort :

Force de rappel :

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$$

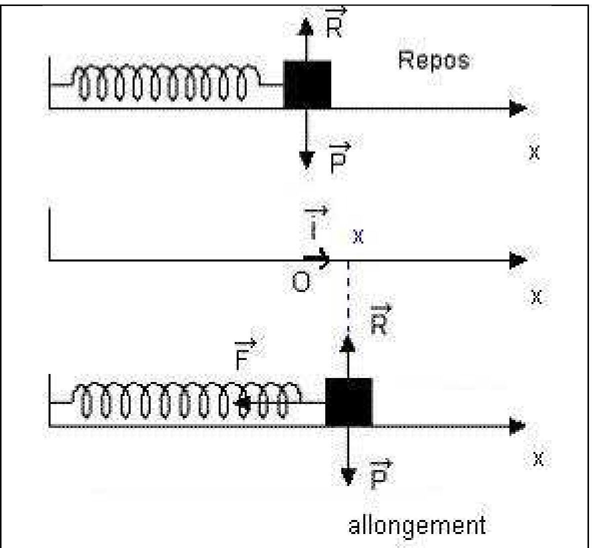
En valeur : F = k $|x|$

F : valeur de la force de rappel en N

k : constante de raideur du ressort en $N.m^{-1}$

x : coordonnée de l'allongement du ressort en m

Cette formule est valable que le ressort soit allongé ou comprimé, et quel que soit le sens choisi pour l'axe Ox.



Système : le solide

Référentiel : laboratoire, galiléen

Bilan des forces : le poids, la réaction du support, la force de rappel

Deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

Projection sur (Ox) :

$P_x + R_x + F_x = m\,a_x$ $\quad$ $P_x = 0$ et $R_x = 0$ car $\vec{P}$ *et* $\vec{R}$ sont perpendiculaires à l'axe (Ox)

$F_x = -F$ car $\vec{F}$ et (Ox) en sens inverse

$-F = m\,a_x$ $\quad$ avec $a_x = \ddot{x}$ (dérivée seconde de x) $\quad$ et $\quad$ F = k x

$k\,x + m\,\ddot{x} = 0$ $\quad$ ou $\quad$ $\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ **(équation différentielle du mouvement)**

Solution de l'équation différentielle :

$$\mathbf{x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi_0\right)}$$

avec x_m amplitude du mouvement

et ϕ_0 phase à l'origine

Dérivons une fois : $\dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0} x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi_0\right)$

Dérivons une deuxième fois : $\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi_0\right)$

On retrouve en vert l'expression de x

Donc : $\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x$ $\quad$ on transpose : $\quad$ $\ddot{x} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x = 0$

On compare avec l'équation différentielle du mouvement, et on en déduit que :

$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$ $\quad$ soit $\quad$ $\mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ $\quad$ avec T_0 période en s, m masse en kg et k constante de raideur en $N.m^{-1}$

Pour les différents mouvements (périodiques, pseudo-périodique…) et la résonance, voir page précédente.