Etudes de cas

Pour étudier le mouvement d'un système en appliquant la deuxième loi de Newton, il faut respecter les points suivants :

- 1) Définir le **système** étudié.
- 2) Préciser le **référentiel** d'étude (galiléen)
- 3) Faire le **bilan des forces** extérieures s'exerçant sur le système.
- 4) Précisez les **conditions initiales**. *Exemple : à t = 0, x = 0 et v = 0*
- 5) Appliquer la deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$

  /!\ m est la masse du système
- 6) Projeter cette relation sur des axes bien choisis ou imposés par l'exercice.

Les forces à connaître : **/!\ la vitesse n'est pas une force !**

Le poids : $\vec{P}$

- Point d'application : centre de gravité G
- Direction : Verticale
- Sens : vers le bas
- Valeur : $P = m \times g$ (m en kg, g = intensité de la pesanteur en N/kg ou m/s² et P en Newton N)

Vectoriellement : $\vec{P} = m \times \vec{g}$

La poussée d'Archimède : $\vec{F_A}$ (on la trouve parfois notée $\vec{\pi}$)

Tout corps immergé dans un fluide (= liquide ou gaz) est soumis de la part de ce fluide à une force de valeur égale au poids du fluide déplacé.

- Point d'application : centre de gravité des fluides déplacés (= centre de poussée)
- Direction : verticale
- Sens : vers le haut
- Valeur : $F_A = \rho_{fluide} \times V \times g$

ρ_{fluide} = masse volumique du fluide

V = volume de fluide déplacé (= volume immérgé du solide)

Si ρ_{fluide} est en kg/L alors V doit être en L. Si ρ_{fluide} est en kg/m^3 alors V doit être en m^3.

Vectoriellement : $\vec{F_A} = - \rho_{fluide} \times V \times \vec{g}$

/!\ le signe – montre que les deux vecteurs sont de sens opposé.

Les forces de frottements : $\vec{f}$

- Point d'application : surface de l'objet, ramené à un point
- Direction : celle du vecteur vitesse
- Sens : opposé au mouvement
- Valeur f en N.

Dans le cas de frottements fluide : $f = K \times v^n$.

K est un coefficient qui dépend de la nature du fluide et de la forme du solide.
n nombre qui dépend entre autre de la vitesse
v : vitesse /!\ à ne pas confondre la vitesse qui est ici notée v avec le volume V.

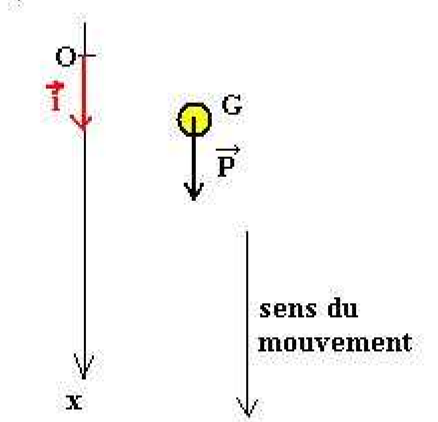
APPLICATION n°1 : chute libre verticale

Etudions la chute libre d'une bille.

Chute libre veut dire que le solide n'est soumis qu'à son poids.

a) SANS vitesse initiale et axe vers le bas :

1)Système : la bille
2)Référentiel : le laboratoire (ou terrestre) considéré galiléen
3)Bilan des forces : le poids $\vec{P}$
4)Conditions initiales :
A t = 0 : $x = 0$
$v = 0$ *(car sans vitesse initiale)*



5)Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \times \vec{a}$

6) Projection sur l'axe Ox *: on enlève les flèches des vecteurs et on met des x en indice à la place*

$P_x = m \times a_x$ or $P_x = + P$ (+ car $\vec{P}$ et Ox sont dans le même sens)

Donc : $P = m \times a_x$ ⇔ $m \times g = m \times a_x$ ⇔ $\mathbf{a_x = g}$
(on remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse du système)

Connaissant l'accélération on peut déterminer la vitesse :

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = g$ donc v_x est la primitive de a_x (ou de g) par rapport au temps

donc : $v_x = g \times t + C_1$ C_1 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

à t = 0 : $v_x = g \times 0 + C_1 = C_1$ or $v_x = 0$ donc $C_1 = 0$ donc

$$\mathbf{v_x = g \times t}$$

Connaissant la vitesse on peut déterminer la coordonnée x:

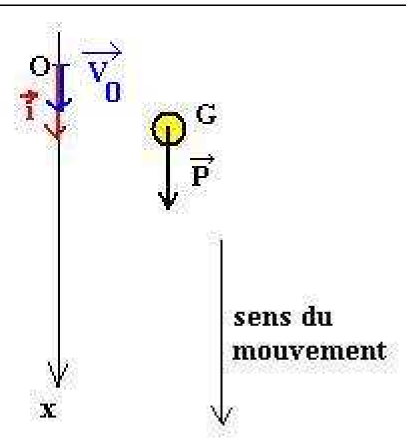
$V_x = \frac{dx}{dt}$ donc x est la primitive de v (= g × t) par rapport au temps

Donc : $\boldsymbol{x = \frac{1}{2} \times g \times t^2 + C_2}$ C_2 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

A t = 0 : $x = \frac{1}{2} \times g \times 0^2 + C_2 = C_2$ or $x = 0$ donc $C_2 = 0$ donc

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2} \times g \times t^2} \quad \textbf{(équation horaire du mouvement)}$$

b) Chute libre AVEC vitesse initiale v_0 vers le BAS et axe vers le bas:

1)Système : la bille 2)Référentiel : le laboratoire (ou terrestre) considéré galiléen 3)Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ 4)Conditions initiales : A t = 0 : $x = 0$ $v_x = + v_0$ *(+ car $\overrightarrow{v_0}$ et Ox ont le même sens)*	

5)Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \times \vec{a}$ 6) Projection sur l'axe Ox *: on enlève les flèches des vecteurs et on met des x en indice à la place* $P_x = m \times a_x$ or $P_x = + P$ (+ car $\vec{P}$ et Ox sont dans le même sens) Donc : $P = m \times a_x$ ⇔ $m \times g = m \times a_x$ ⇔ $\mathbf{a_x = g}$ *(on remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse du système)* Connaissant l'accélération on peut déterminer la vitesse : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = g$ donc v_x est la primitive de a_x (ou de g) par rapport au temps donc : $v_x = g \times t + C_1$ C_1 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales	AUCUN CHANGEMENT POUR L'INSTANT

à t = 0 : $v_x = g \times 0 + C_1 = C_1$ or $v_x = + v_0$ donc $C_1 = + v_0$ donc

$$\mathbf{v_x = g \times t + v_0}$$

Connaissant la vitesse on peut déterminer la coordonnée x:

$V_x = \frac{dx}{dt}$ donc x est la primitive de v ($= g \times t + v_0$) par rapport au temps

Donc : $\mathbf{x = \frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times t + C_2}$ C_2 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

A t = 0 : $x = \frac{1}{2} \times g \times 0^2 + v_0 \times 0 + C_2 = C_2$ or $x = 0$ donc $C_2 = 0$ donc

$$\mathbf{x = \frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times t} \quad \textbf{(équation horaire du mouvement)}$$

c) Chute libre AVEC vitesse initiale v_0 vers le HAUT et axe vers le haut:

<u>1)Système</u> : la bille

<u>2)Référentiel</u> : le laboratoire (ou terrestre) considéré galiléen

<u>3)Bilan des forces</u> : le poids $\vec{P}$

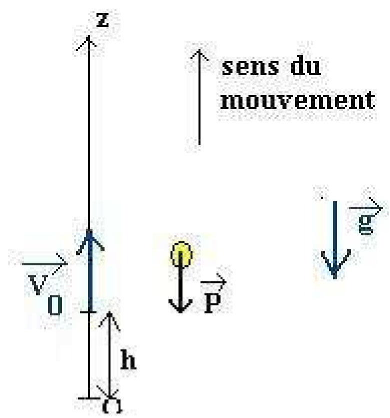
<u>4)Conditions initiales :</u>

A t = 0 : z = h (l'objet est lancé depuis une certaine hauteur)

$v_z = + v_0$

/!\(+ car $\vec{v_0}$ et Oz ont le même sens)

/!\ il y a « z » à la place de « x » car l'axe s'appelle Oz



<u>5)Deuxième loi de Newton :</u> $\vec{P} = m \times \vec{a}$

<u>6) Projection sur l'axe Oz</u>*: on enlève les flèches des vecteurs et on met des z en indice à la place*

$P_z = m \times a_z$ or $P_z = - P$ (- car $\vec{P}$ et Oz sont de sens contraire)

Donc : $- P = m \times a_z$ ⇔ $- m \times g = m \times a_z$ ⇔ $\mathbf{a_z = - g}$

(on remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse du système)

<u>Connaissant l'accélération on peut déterminer la vitesse :</u>

$a_z = \frac{dv_z}{dt} = - g$ donc v_z est la primitive de a_z (ou de -g) par rapport au temps

donc : $v_z = - g \times t + C_1$ C_1 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

<u>/ !\ AUX CHANGEMENTS : Axe, signes,…</u>

à t = 0 : $v_z = g \times 0 + C_1 = C_1$ or $v_z = + v_0$ donc $C_1 = + v_0$ donc

$$\mathbf{v_z = - g \times t + v_0}$$

<u>Connaissant la vitesse on peut déterminer la coordonnée z:</u>

$V_z = \frac{dz}{dt}$ donc z est la primitive de v (= $- g \times t + v_0$) par rapport au temps

Donc : $\boldsymbol{z = - \frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times t + C_2}$ C_2 est une constante que l'on trouve grâce aux conditions initiales

A t = 0 : $z = - \frac{1}{2} \times g \times 0^2 + v_0 \times 0 + C_2 = C_2$ or $z = h$ donc $C_2 = h$ donc

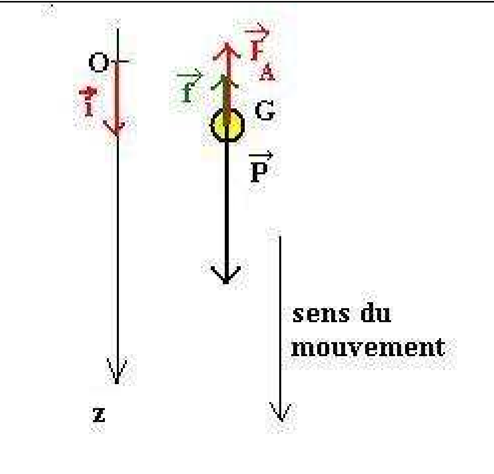
$$\boldsymbol{z = - \frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times t + h} \textbf{ (équation horaire du mouvement)}$$

APPLICATION n°2 : chute verticale avec frottements

Chute d'une bille de masse m, de rayon R, de volume V et de masse volumique ρ_{bille},
lâchée sans vitesse initiale dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide}.

1)Système : la bille
2)Référentiel : le laboratoire (ou terrestre) considéré galiléen
3)Bilan des forces :
- le poids $\vec{P}$: valeur $P = m \times g$
- la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$: valeur $F_A = \rho_{fluide} \times V \times g$
- les forces de frottements fluide $\vec{f}$: valeur $f = K \times v^n$

4)Conditions initiales :
A t = 0 : $z = 0$
$v = 0$ *(car sans vitesse initiale)*



5) Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \overrightarrow{F_A} + \vec{f} = m \times \vec{a}$

6) Projection sur l'axe Oz *: on enlève les flèches des vecteurs et on met des z en indice à la place*

$P_z + F_{A_z} + f_z = m \times a_z$ or $P_z = + P = + m \times g$ (+ car $\vec{P}$ et Oz sont dans le même sens)

$F_{A_z} = - F_A = - \rho_{fluide} \times V \times g$ (- car $\overrightarrow{F_A}$ et $\vec{f}$ sont de sens

$f_z = - f = - K \times v^n$ opposé à l'axe Oz)

Donc : $+ m \times g - \rho_{fluide} \times V \times g - K \times v^n = m \times a_z$

On peut en déduire l'équation différentielle du mouvement en fonction de la vitesse :

$a_z = \frac{dv_z}{dt}$ on remplace dans l'équation précédente :

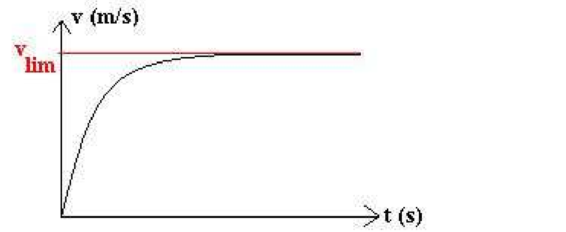
$+ m \times g - \rho_{fluide} \times V \times g - K \times v^n = m \times \frac{dv_z}{dt}$ $v_z = v$ (même sens que l'axe Oz)

$$\boldsymbol{+ m \times g - \rho_{fluide} \times V \times g - K \times v^n = m \times \frac{dv}{dt}}$$

L'existence des frottements a pour conséquence que le système finit par atteindre une vitesse limite (vitesse maximale) qui est constante. Puisqu'elle est constante sa dérivée est nulle, et c'est ce point qui va être utile :

$+ m \times g - \rho_{fluide} \times V \times g - K \times v_{lim}^n = m \times \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$

$+ m \times g - \rho_{fluide} \times V \times g - K \times v_{lim}^n = 0$



Il reste ensuite à isoler la vitesse limite pour répondre à la question.

Remarque : A quoi sert la masse volumique de la bille ? A vous embrouiller !?

En fait si on ne connait pas son volume mais sa masse, son rayon et sa masse volumique, on peut déterminer son volume.

$\rho_{\text{bille}} = \frac{m_{bille}}{V} \Leftrightarrow m_{\text{bille}} = \rho_{\text{bille}} \times V$

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ (volume d'une sphère)

Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler :

$$+ m \times g - \rho_{fluide} \times V \times g - K \times v^n = m \times \frac{dv}{dt}$$

Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme : $\frac{dv}{dt} = A - B \times v^n$

Ou avec l'accélération a (car $a = \frac{dv}{dt}$) : $a = A - B \times v^n$

Pour un pas bien choisi : $\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = A - B \times v^n$ donc $\Delta v = (A - B \times v^n) \times \Delta t$

La méthode d'Euler consiste à calculer la vitesse par étapes en décomposant le temps en intervalles de temps **Δt (appelés « pas »)**.

<u>A la date $t_0 = 0$,</u> vitesse v_0 , accélération $a_0 = A - B \times v_0^n$

<u>A la date $t_1 = t_0 + \Delta t = \Delta t$</u> vitesse v_1 ; $\Delta v = v_1 - v_0 = (A - B \times v_0^n) \times \Delta t$

donc $v_1 = (A - B \times v_0^n) \times \Delta t + v_0$

$v_1 = a_0 \times \Delta t + v_0$

accélération : $a_1 = A - B \times v_1^n$

<u>A la date $t_2 = t_1 + \Delta t = 2 \times \Delta t$</u> vitesse v_2 ; $\Delta v = v_2 - v_1 = (A - B \times v_1^n) \times \Delta t$

donc $v_2 = (A - B \times v_1^n) \times \Delta t + v_1$

$v_2 = a_1 \times \Delta t + v_1$

accélération : $a_2 = A - B \times v_2^n$

etc…

APPLICATION n°3 : montée verticale avec frottements

Montée d'un ballon de volume V, lâché (doncsans vitesse initiale) dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide}. (montgolfière, ballon gonflé à l'hélium…)

1)Système : le ballon

2)Référentiel : le laboratoire (ou terrestre) considéré galiléen

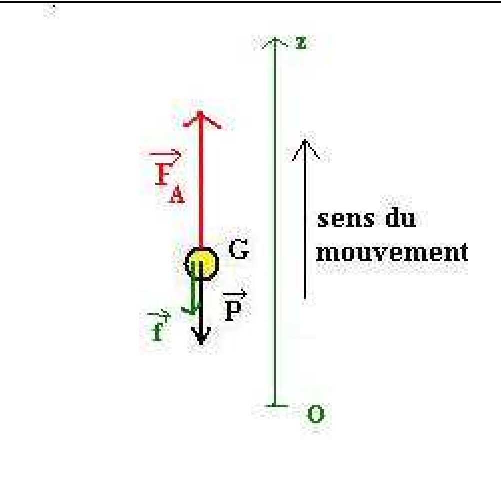
3)Bilan des forces :

- le poids $\vec{P}$: valeur $P = m \times g$
- la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$: valeur $F_A = \rho_{fluide} \times V \times g$
- les forces de frottements fluide $\vec{f}$: valeur $f = K \times v^n$

4)Conditions initiales :

A $t = 0$: $z = 0$

$v = 0$ *(car sans vitesse initiale)*



5)Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \overrightarrow{F_A} + \vec{f} = m \times \vec{a}$

6) Projection sur l'axe Oz *: on enlève les flèches des vecteurs et on met des z en indice à la place*

$P_z + F_{A_z} + f_z = m \times a_z$

or $P_z = - P = - m \times g$ (- car $\vec{P}$ et Oz sont de sens opposé)

$F_{A_z} = + F_A = + \rho_{fluide} \times V \times g$ (+ car $\overrightarrow{F_A}$ est de même sens que l'axe Oz)

$f_z = - f = - K \times v^n$ (- car $\vec{f}$ et Oz sont de sens contraire)

Donc : $- m \times g + \rho_{fluide} \times V \times g - K \times v^n = m \times a_z$

Etc…